

DOI <https://doi.org/10.33989/pnpn.1235.c4136>

## РЕАЛІЗАЦІЯ ДИДАКТИЧНОГО ПРИНЦИПУ НАОЧНОСТІ ЗАСОБАМИ СИСТЕМ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ У ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

*Анотація.* У статті досліджено можливості реалізації дидактичного принципу наочності у процесі підготовки майбутніх учителів математики засобами систем динамічної математики. Обґрунтовано доцільність використання цифрових інструментів для візуалізації математичних об'єктів, процесів і залежностей у фаховій підготовці здобувачів освіти. Проаналізовано дидактичний потенціал інтерактивних середовищ у формуванні математичних понять, розвитку просторового мислення та дослідницьких умінь. Визначено педагогічні умови ефективної інтеграції систем динамічної математики в освітній процес закладу вищої освіти. Підкреслено роль цифрової наочності у підвищенні мотивації до навчання та формуванні методичної компетентності майбутніх учителів. Доведено, що систематичне застосування таких засобів сприяє активізації пізнавальної діяльності та підготовці студентів до використання інноваційних технологій у професійній діяльності.

*Ключові слова:* принцип наочності, системи динамічної математики, професійна підготовка, майбутні учителі математики, цифрові технології, візуалізація, математична освіта.

Сучасний етап розвитку математичної освіти характеризується активною цифровою трансформацією освітнього середовища, що зумовлює переосмислення підходів до реалізації дидактичних принципів навчання, зокрема принципу наочності. Іntenсивне впровадження інформаційно-

комунікаційних технологій у підготовку майбутніх учителів математики відкриває нові можливості для візуалізації абстрактних понять, моделювання математичних об'єктів і процесів, дослідження функціональних залежностей та геометричних перетворень у динамічному режимі.

Особливого значення в цьому контексті набувають системи динамічної математики (*GeoGebra, Desmos, Cabri, DG та ін.*), які забезпечують інтерактивність, варіативність і дослідницький характер навчальної діяльності. Їх використання сприяє не лише підвищенню рівня наочності математичного матеріалу, а й формуванню глибокого концептуального розуміння математичних структур, розвитку просторового та функціонального мислення, активізації пізнавальної діяльності здобувачів освіти (Андрощук, Жук, 2024).

У зв'язку з цим предметна і методична підготовка майбутніх учителів математики має здійснюватися в умовах цілеспрямованого використання систем динамічної математики як інструменту реалізації принципу наочності під час вивчення фахових дисциплін і проходження педагогічної практики. Це забезпечує готовність майбутніх педагогів до впровадження сучасних цифрових засобів у професійній діяльності та підвищує якість шкільної математичної освіти.

Аналіз наукових праць свідчить про зростання інтересу дослідників до проблеми використання комп'ютерних математичних систем у навчальному процесі вищої школи. Питання застосування математичних пакетів та педагогічних програмних засобів розглядалися у дослідженнях С. Дяченко, Т. Ніренбург, І. Пальчикової, Є. Рябухіної, Є. Кліменко, А. Денисової, Т. Крамаренко, Д. Покришня, О. Співаковського, М. Жалдака, С. Рибачка, В. Клочко та інших учених. Водночас проблема системного впровадження саме систем динамічної математики як засобу реалізації дидактичного принципу наочності у професійній підготовці майбутніх учителів математики потребує подальшого теоретичного обґрунтування та методичного забезпечення.

Попри наявність значної кількості програмних засобів (*GeoGebra, Desmos, Cabri, DG* та ін.), у практиці підготовки майбутніх учителів математики їх використання часто має фрагментарний характер і не пов'язується безпосередньо з реалізацією конкретних дидактичних принципів.

У результаті:

- цифрові інструменти використовуються як ілюстративний додаток, а не як засіб формування математичних понять;
- недостатньо формується методична готовність майбутнього вчителя до впровадження динамічної візуалізації у шкільній практиці;
- відсутня цілісна модель інтеграції систем динамічної математики в структуру фахової підготовки.

Це зумовлює необхідність розроблення науково обґрунтованої методики використання систем динамічної математики саме в контексті реалізації принципу наочності.

У контексті реалізації дидактичного принципу наочності засобами систем динамічної математики доцільно враховувати потенціал сучасного науково-дослідницького програмного забезпечення, що активно використовується у професійній математичній діяльності та освітньому процесі. Ринок спеціалізованих математичних середовищ представлений широким спектром програмних продуктів, серед яких *MathCAD, MatLab, Mathematica, Maple, Maxima* та інші. Зазначені системи забезпечують комплекс інструментів для виконання як чисельних, так і символічних обчислень, що розширює можливості візуалізації та моделювання математичних об'єктів (Гриб'юк, 2020).

Функціональний інструментарій таких середовищ охоплює виконання арифметичних і логічних операцій, обчислення елементарних та спеціальних функцій, роботу з числами різних типів (дійсними, комплексними), опрацювання числових даних довільної точності та в різних системах числення. Важливим є також забезпечення процедур символічного та чисельного диференціювання й інтегрування, знаходження границь, обчислення сум і добутків, перетворення

аналітичних виразів. Окремий блок становлять операції з векторами і матрицями, розв'язування задач лінійної алгебри, елементів векторного аналізу (обчислення градієнта, дивергенції, ротора тощо), що є суттєвим для підготовки майбутніх учителів математики до пояснення відповідного навчального матеріалу.

Значущою характеристикою зазначених систем є їх розвинені засоби графічного представлення інформації: побудова графіків функцій однієї та кількох змінних, полярних кривих, поверхонь, ліній рівня, векторних полів, статистичних залежностей. Саме ці можливості створюють передумови для переходу від статичної ілюстрації до динамічного моделювання математичних процесів, що безпосередньо корелює з принципом наочності в навчанні.

Таке програмне забезпечення умовно поділяється на кілька груп залежно від функціонального призначення. До першої групи належать математичні пакети вузької спеціалізації (*GAP, Macaulay, Singular*), орієнтовані на розв'язування специфічних задач алгебри та теорії чисел. Другу групу становлять засоби візуалізації математичних даних (*GnuPlot, Jmol, LaTeX*), що забезпечують графічне подання результатів обчислень і підготовку математичних текстів. До третьої групи відносять системи геометричного та інженерного моделювання (*ANSYS, Autodesk 3ds Max*), які дозволяють здійснювати просторове моделювання складних об'єктів. Четверту групу складають системи комп'ютерної алгебри (*Maple, Mathematica, MATLAB, MathCAD, Maxima, Sage*), що поєднують символічні та чисельні методи обчислення.

Аналіз наукових досліджень засвідчує, що проблема використання систем комп'ютерної математики у професійній підготовці педагогів є предметом ґрунтовного вивчення. Зокрема, С. Дяченко обґрунтовує доцільність застосування інтегрованої символічної системи Mathematica як ефективного засобу навчання вищої математики (Дяченко, 2019). У працях О. Шаран розглядається використання середовища Derive як інструменту організації факультативних занять та формування обчислювальної культури учнів (Шаран, 2009). О. Співаковський підкреслює роль систем комп'ютерної алгебри у

підтримці професійної математичної діяльності, пов'язаної із символічними перетвореннями та чисельними розрахунками (Співаковський, 2003). Л. Ковальов, С. Лещенко, М. Медведєва, Р. Ненька акцентують увагу на використанні Maple та MathCAD для ілюстрування лекційного матеріалу, зокрема побудови графіків і демонстрації алгоритмів обчислень (Ковальов та ін., 2020). Ю. Триус здійснює порівняльний аналіз найпоширеніших систем комп'ютерної математики, визначаючи їх потенціал для використання у закладах вищої освіти (Триус, 2010).

У межах нашого дослідження особливий інтерес становлять системи комп'ютерної алгебри як підґрунтя для подальшого переходу до систем динамічної математики. Зокрема, середовище Mathematica вирізняється поєднанням потужного символічного ядра, розвинених графічних інструментів і функціональної мови програмування. Воно забезпечує створення інтерактивних документів із високоякісним графічним та формульним оформленням, що відповідає вимогам наукової комунікації та освітньої практики (Абелл (Abell), Браселтон (Braselton), 2017).

Водночас, попри значний потенціал зазначених систем, їх використання у підготовці майбутніх учителів математики має бути педагогічно доцільним і методично вмотивованим. У контексті реалізації принципу наочності доцільним є поєднання можливостей систем комп'ютерної алгебри з інструментарієм систем динамічної математики (*GeoGebra*, *Desmos* тощо), що забезпечує інтерактивність, варіативність і дослідницьку спрямованість навчального процесу. Така інтеграція створює умови для формування методичної готовності майбутнього вчителя до використання цифрових засобів візуалізації у шкільному курсі математики та підвищує ефективність опанування складного математичного змісту через поєднання аналітичного й графічного представлення навчального матеріалу.

Розглянемо детальніше можливості систем комп'ютерної алгебри на прикладі середовища **Mathematica**. Це потужна система комп'ютерної алгебри,

що широко застосовується у наукових, інженерних, математичних і комп'ютерних дослідженнях. Програмний пакет забезпечує створення автономних інтерактивних документів, у яких поєднуються аналітичні викладки, формульний запис і високоякісна графічна візуалізація результатів у поліграфічному форматі.

*Mathematica* характеризується інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом, розвинутою мовою програмування, широким набором вбудованих функцій для символічних і чисельних обчислень, а також інтегрованим текстовим редактором. Сукупність зазначених можливостей дозволяє використовувати систему не лише як обчислювальний інструмент, а й як дидактичний засіб підтримки наочності та організації дослідницької діяльності в процесі підготовки майбутніх учителів математики.

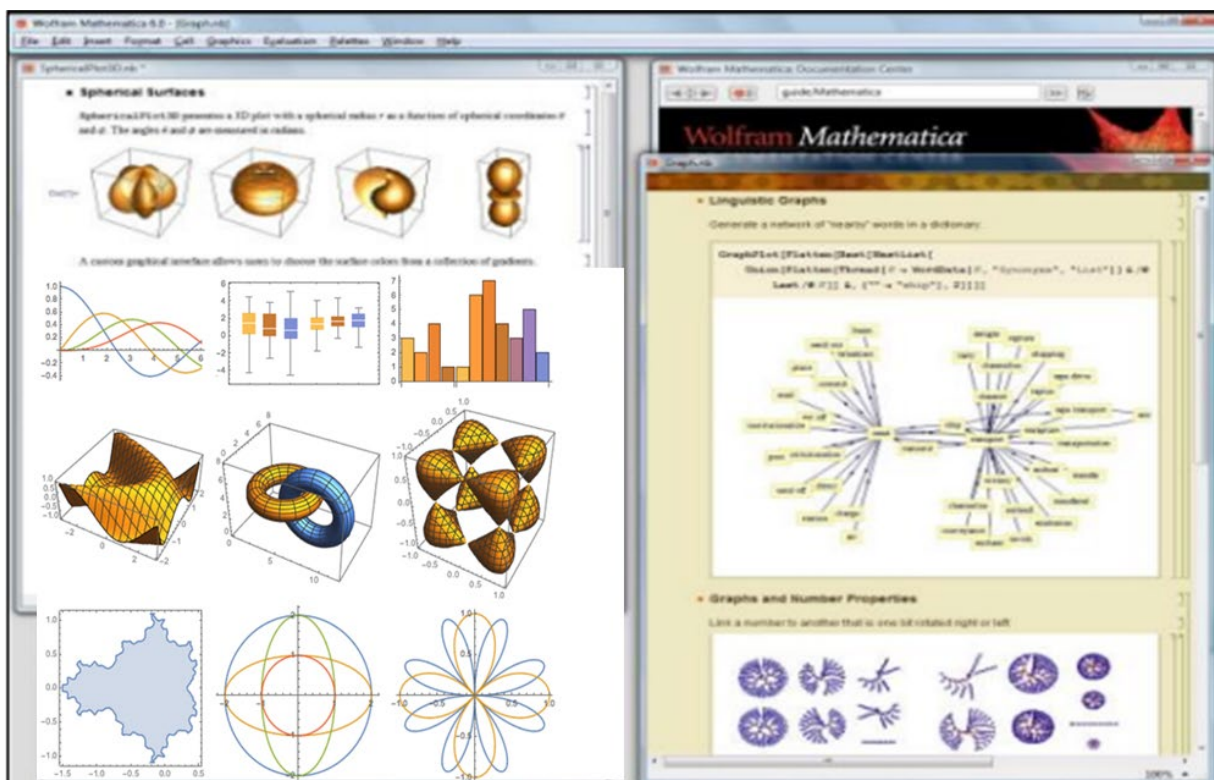


Рис. 1. Фрагмент роботи у системі Mathematica

На рис. 1. Представлено фрагменти робочого середовища системи комп'ютерної алгебри Mathematica, що ілюструють її функціональні можливості у контексті візуалізації та моделювання математичних об'єктів.

Ліва частина зображення демонструє приклади побудови просторових поверхонь та тривимірних моделей складної структури, які можуть бути інтерактивно змінені шляхом варіювання параметрів. Такий формат подання забезпечує динамічну наочність, дозволяє досліджувати геометричні властивості об'єктів, аналізувати симетрію, кривину, топологічні характеристики та встановлювати зв'язки між аналітичним записом і графічною інтерпретацією.

Права частина рисунка відображає можливості системи щодо роботи з символічними обчисленнями, структурованими графічними схемами та математичними конструкціями. Інтерфейс поєднує текстовий редактор, формульний ввід і графічні результати обчислень, що забезпечує створення інтерактивних документів, у яких аналітичні викладки інтегруються з візуальним поданням результатів. Такий формат є особливо цінним у підготовці майбутніх учителів математики, оскільки дозволяє формувати цілісне бачення математичного об'єкта: від формули – до графіка, від алгоритму – до моделі.

У межах реалізації дидактичного принципу наочності використання Mathematica сприяє переходу від статичного ілюстрування до дослідницького моделювання. Інтерактивність середовища дає можливість демонструвати вплив зміни параметрів на форму графіка або поведінку функції в режимі реального часу, що поглиблює розуміння математичних закономірностей і розвиває аналітико-синтетичне мислення.

Наступною системою розглянемо **Maple**. Maple є спеціалізованою системою комп'ютерної алгебри, орієнтованою на виконання як символічних, так і чисельних обчислень (рис. 2). У межах реалізації дидактичного принципу наочності це програмне середовище може виступати ефективним інструментом поєднання аналітичних перетворень із графічною інтерпретацією результатів.

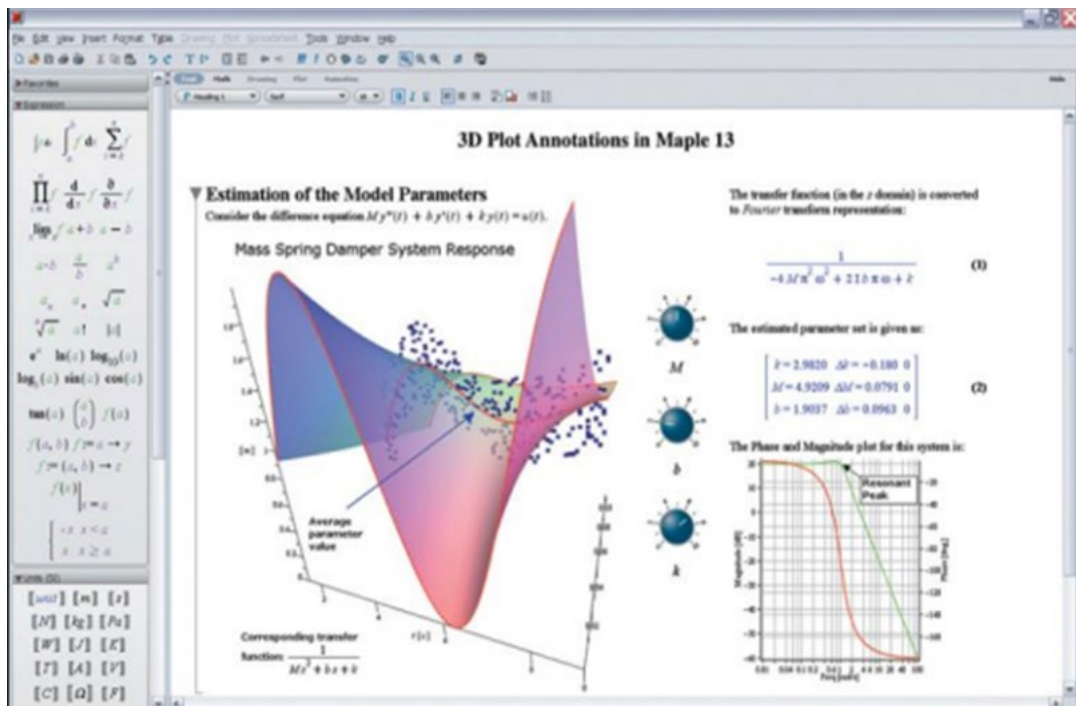


Рис. 2. Фрагмент роботи у системі Maple

На рис. 2. Представлено приклад робочого вікна *Maple* із побудовою тривимірної поверхні та супровідними аналітичними розрахунками. Інтерфейс дозволяє одночасно відображати математичні формули у форматі, наближеному до поліграфічного, текстові пояснення та графічні результати обчислень. Така структурна організація робочого простору сприяє формуванню цілісного уявлення про математичний об'єкт: від його аналітичного задання – до просторової візуалізації. Особливої дидактичної цінності набуває можливість дослідження залежностей між параметрами моделі в інтерактивному режимі.

Функціональні можливості *Maple* охоплюють розв'язування задач теорії чисел, теорії груп, евклідової та аналітичної геометрії, математичної статистики й теорії ймовірностей, фінансової математики (Шевчук, Шевчук, 2020). Система підтримує операції з дійсними та комплексними числами, побудову графіків функцій, у тому числі конформних відображень у комплексній площині, а також візуалізацію кривих і поверхонь у дво- і тривимірному просторі (явно та параметрично заданих). Розвинені засоби графіки й анімації забезпечують

можливість моделювання динамічних процесів, що є важливим для глибшого розуміння змісту математичних понять.

Важливо підкреслити, що середовище *Maple* має вбудовану мову програмування інтерпретаторного типу, яка дає змогу розробляти алгоритми розв'язування задач і автоматизувати обчислювальні процедури (Шевчук, Шевчук, 2021). Це створює передумови для формування у майбутніх учителів математики навичок алгоритмічного мислення та дослідницької діяльності.

Водночас окремі дослідники звертають увагу на певну академічність інтерфейсу системи та складність його структури для початкового опанування, що може ускладнювати використання *Maple* у шкільній практиці без відповідної методичної підготовки (Ковальчук, 2019). Саме тому в контексті підготовки майбутніх учителів доцільним є поєднання можливостей *Maple* із більш інтуїтивними системами динамічної математики, що забезпечує поступовий перехід від складних символічних обчислень до доступної інтерактивної візуалізації.

**Mathcad** є багатofункціональною інтерактивною обчислювальною системою, орієнтованою на поєднання математичних розрахунків із текстовими поясненнями та графічною інтерпретацією результатів (рис. 3).

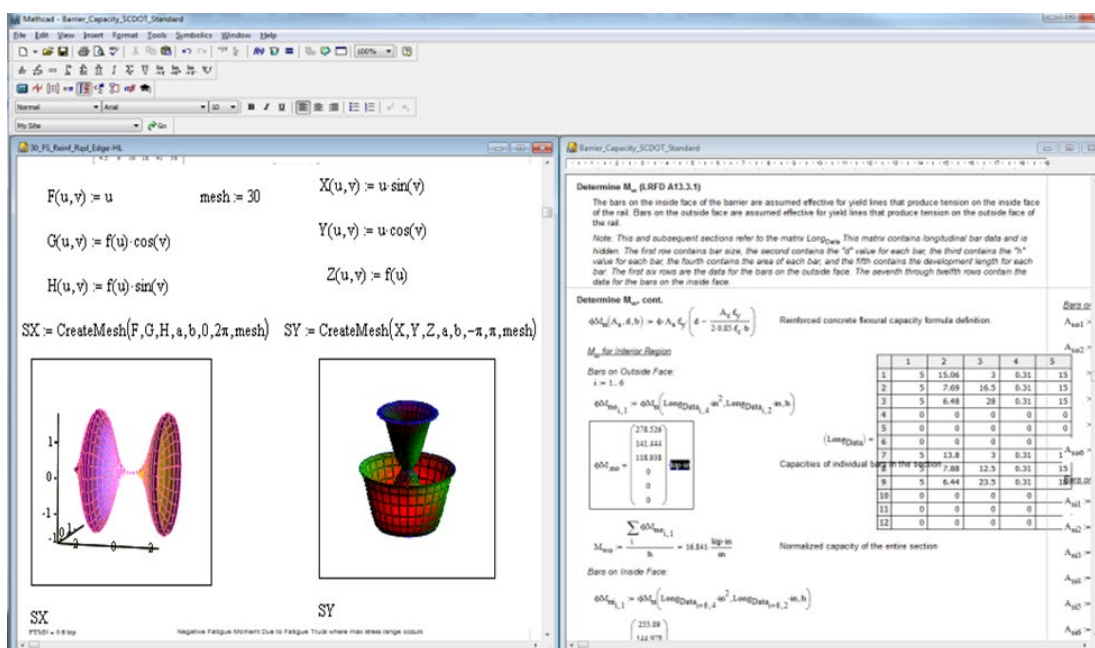


Рис. 3. Фрагмент роботи у системі Mathcad

У межах реалізації дидактичного принципу наочності це програмне середовище може розглядатися як ефективний інструмент структурованого подання математичних розв'язань у форматі, максимально наближеному до традиційного письмового оформлення.

На рис. 3 продемонстровано робочий інтерфейс *Mathcad*, у якому обчислювальні процедури, таблиці даних, формульні записи та текстові коментарі інтегровані в єдиний документ. Така організація простору дозволяє поетапно відображати хід розв'язування задачі — від введення вихідних параметрів до отримання числових і графічних результатів. Для підготовки майбутніх учителів математики це має принципове значення, оскільки сприяє формуванню логіки математичного доведення та культури оформлення розрахунків (Мілюкова, 2019).

Функціональні можливості системи охоплюють виконання числових операцій різного рівня складності, символічне й чисельне диференціювання та інтегрування, обчислення тригонометричних, експоненційних, логарифмічних, гіперболічних та інших функцій, знаходження власних значень і власних векторів лінійних операторів, роботу з матрицями та векторами. Крім того, середовище підтримує статистичну обробку даних, побудову імовірнісних моделей розподілу та аналіз результатів експериментальних досліджень.

Важливою перевагою *Mathcad* є наочне відображення математичних виразів у природній формі, що наближує електронний документ до традиційного зошитового запису (Шевчук, Шевчук, 2020). Це створює сприятливі умови для використання системи у навчальному процесі, особливо під час пояснення алгоритмів розв'язування задач і демонстрації покрокових обчислень. Наявність дво- та тривимірної графіки дозволяє здійснювати візуалізацію функціональних залежностей і результатів моделювання.

Разом з тим, порівняно з іншими інтегрованими системами комп'ютерної алгебри, *Mathcad* має певні обмеження у сфері графічного моделювання, зокрема

щодо гнучкості форматування графіків та побудови поверхонь, заданих параметричними рівняннями.

**Maxima** є спеціалізованою системою комп'ютерної алгебри, призначеною для роботи з символічними та чисельними виразами в різних розділах математики (рис. 4).

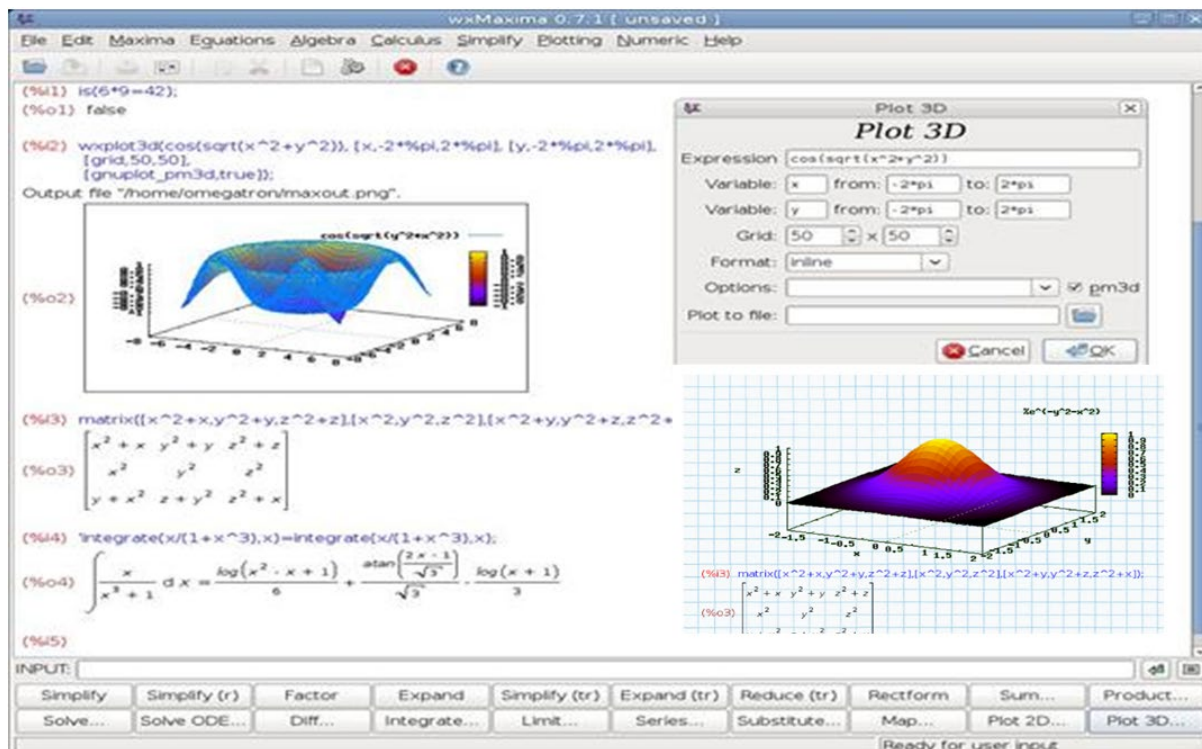


Рис. 4. Фрагмент роботи у системі Maxima

На рис. 4 продемонстровано робоче середовище *Maxima*, у якому відображено символічні перетворення алгебраїчних виразів і побудову тривимірної поверхні. Інтерфейс забезпечує введення формул у текстовому форматі з подальшим автоматичним виконанням обчислень та графічним поданням результатів. Побудова двовимірних і тривимірних графіків здійснюється на основі аналітичного задання функцій, що дозволяє встановлювати взаємозв'язок між формульним записом і його геометричною інтерпретацією. Така інтеграція сприяє глибшому розумінню математичних залежностей і формує в майбутніх учителів уміння поєднувати теоретичні знання з їх візуалізацією.

Серед ключових функціональних можливостей *Maxima* — перетворення та спрощення алгебраїчних виразів, диференціювання, обчислення визначених і невизначених інтегралів, знаходження границь, обчислення скінченних і нескінченних сум та добутків, розв’язування алгебраїчних і диференціальних рівнянь та їх систем, розкладання функцій у ряди. Система також підтримує реалізацію чисельних методів для задач, які не мають аналітичного розв’язку, що розширює її можливості у сфері математичного моделювання.

Окрему цінність для освітнього процесу становлять інструменти розв’язування задач оптимізації (зокрема задач лінійного програмування та пошуку екстремумів функцій), а також засоби математичної статистики. Реалізований у системі адаптивний контроль точності дозволяє автоматично добирати оптимальні алгоритми обчислень, що підвищує достовірність результатів і формує у здобувачів освіти уявлення про алгоритмічну основу чисельних методів (Гриб’юк, 2020).

*Maxima* має вбудовану довідкову систему з прикладами використання функцій, що полегшує її опанування. Простота інтерфейсу та відкритість програмного коду створюють сприятливі умови для використання системи як у базовій математичній підготовці, так і в науково-дослідній діяльності.

У підготовці майбутніх учителів математики *Maxima* доцільно застосовувати як засіб формування навичок аналітичних перетворень і дослідницького підходу до розв’язування задач. Водночас для забезпечення повноцінної інтерактивної наочності доцільним є її поєднання із системами динамічної математики, що дозволяє інтегрувати символні обчислення з візуальним моделюванням математичних процесів.

**MatLab** є потужним пакетом прикладних програм для розв’язування складних обчислювальних задач, а також середовищем програмування з однойменною мовою високого рівня (рис. 5). У контексті реалізації дидактичного принципу наочності ця система виступає ефективним

інструментом математичного моделювання, обробки даних та графічної інтерпретації результатів досліджень.

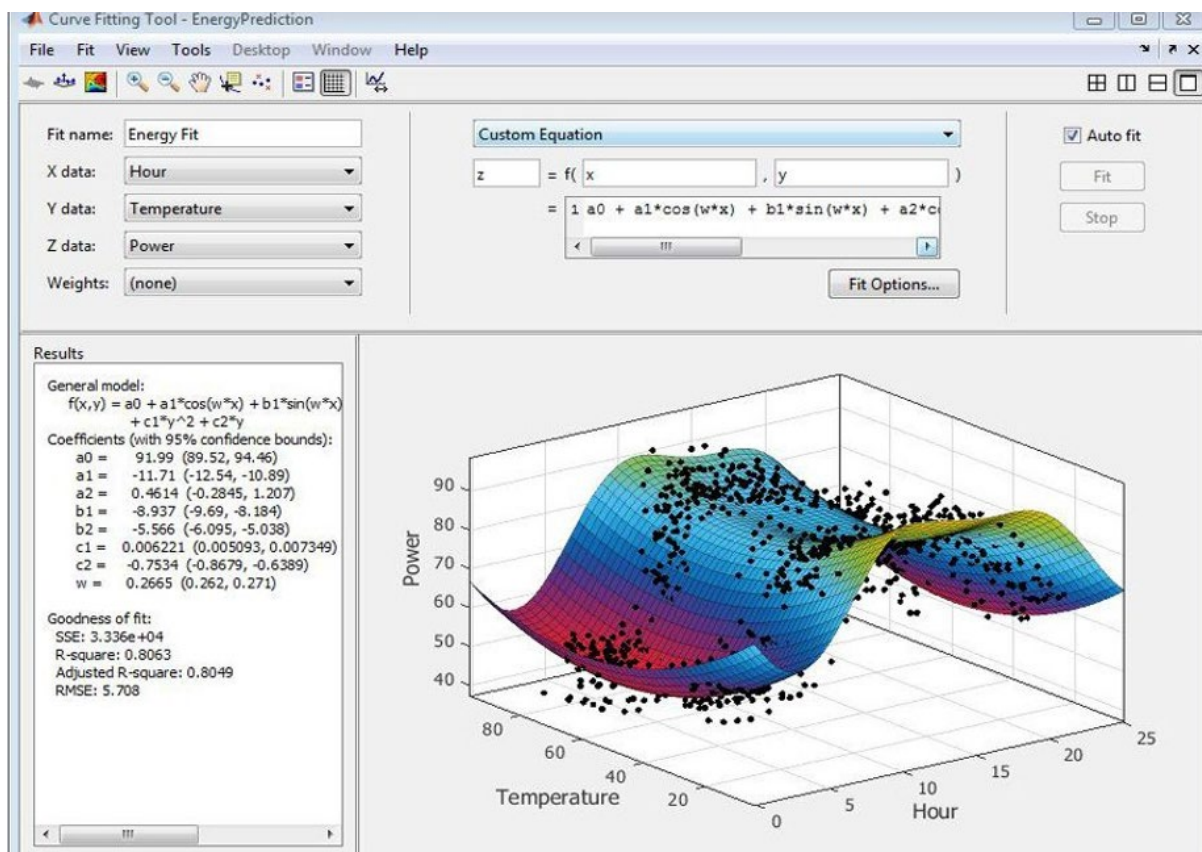


Рис. 5. Фрагмент роботи у системі MatLab

На рис. 5 представлено приклад використання *MatLab* для апроксимації експериментальних даних із подальшою побудовою тривимірної поверхні. Робоче середовище дозволяє поєднувати чисельні розрахунки, статистичний аналіз і візуалізацію результатів у вигляді просторових моделей. Така інтеграція аналітичного та графічного компонентів забезпечує високий рівень наочності, що є особливо важливим у процесі підготовки майбутніх учителів математики до пояснення прикладних аспектів математичного аналізу, оптимізації та теорії функцій багатьох змінних.

Мова програмування *MatLab* є інтерпретованою, підтримує об'єктно-орієнтовані підходи, містить розвинені структури даних та значний набір вбудованих функцій для роботи з матрицями, векторами, масивами великих

обсягів. Саме матрична орієнтація системи забезпечує ефективність виконання операцій лінійної алгебри, чисельного інтегрування, розв'язування диференціальних рівнянь, обробки сигналів і зображень (Почтовюк, 2011). Інтегроване середовище розробки дозволяє створювати алгоритми, моделювати складні процеси та автоматизувати обчислювальні процедури.

До ключових переваг *MatLab* належать мультиплатформеність, масштабованість, можливість роботи з великими масивами даних і розвинені засоби дво- та тривимірної графіки. Це створює сприятливі умови для організації дослідницької діяльності здобувачів освіти, формування навичок математичного моделювання та аналізу результатів експерименту.

Водночас система характеризується підвищеними вимогами до апаратних ресурсів, обмеженими можливостями символічних обчислень (порівняно із системами комп'ютерної алгебри) та певними особливостями організації довідкового середовища. Зазначені аспекти потребують врахування при впровадженні *MatLab* у навчальний процес.

Для забезпечення ефективної реалізації дидактичного принципу наочності у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики доцільним є систематичне використання систем динамічної математики (СДМ), зокрема *GeoGebra*, *Desmos* та інших інтерактивних математичних середовищ. Зазначені інструменти дозволяють інтегрувати аналітичний, графічний і чисельний компоненти навчання, забезпечуючи цілісне сприйняття математичних об'єктів і процесів, розглянемо деякі з них.

**GeoGebra**— це система динамічної математики, що поєднує інструменти геометрії, алгебри, математичного аналізу, статистики та тривимірного моделювання в єдиному інтерактивному середовищі. У межах реалізації дидактичного принципу наочності *GeoGebra* виступає одним із найбільш ефективних засобів візуалізації математичних об'єктів і процесів у підготовці майбутніх учителів математики (рис. 6).

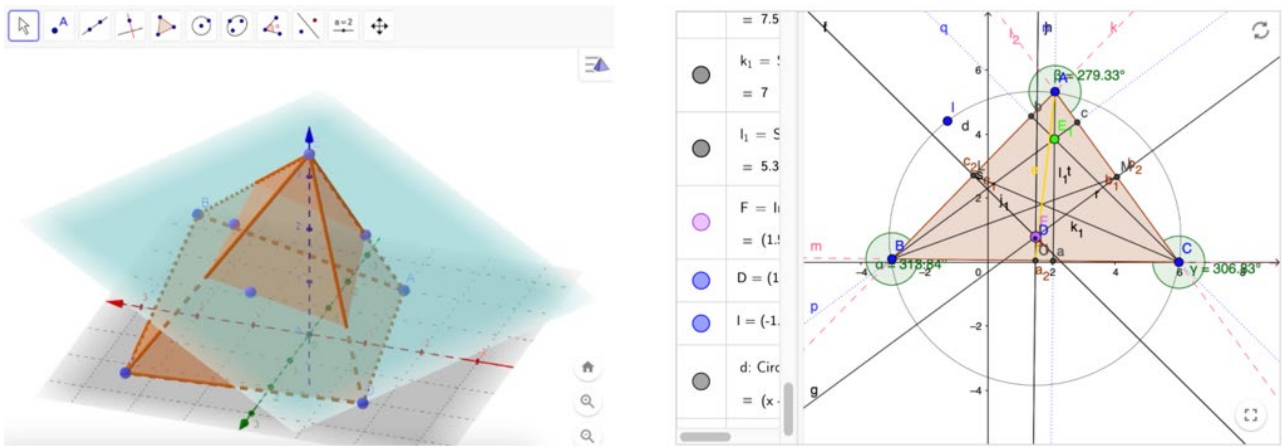


Рис. 6. Фрагмент роботи у системі GeoGebra

Середовище забезпечує одночасне відображення алгебраїчного, графічного та табличного подання математичних об'єктів. Будь-яка зміна параметрів автоматично відображається на графіку, що дозволяє встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між аналітичним записом і його геометричною інтерпретацією (Андрощук, Жук, 2024). Така синхронізація сприяє формуванню цілісного математичного мислення та розвитку здатності до узагальнення.

До основних можливостей *GeoGebra* належать:

- побудова та дослідження графіків функцій, у тому числі параметричних і неявно заданих;
- створення динамічних моделей із використанням повзунків для варіювання параметрів;
- візуалізація похідної як функції та як кута нахилу дотичної;
- графічна інтерпретація визначеного інтеграла (площа під кривою);
- побудова поверхонь і ліній рівня у тривимірному просторі;
- моделювання векторів, базисів, перетворень площини та простору;
- створення інтерактивних навчальних матеріалів і демонстрацій;
- статистична обробка даних, побудова гістограм і діаграм розсіювання (Рашевська, 2010).

Важливою перевагою *GeoGebra* є інтуїтивно зрозумілий інтерфейс та можливість використання як у локальній версії, так і в хмарному середовищі

(Крамаренко, Чернишова, 2024). Це забезпечує доступність інструменту під час аудиторної та самостійної роботи студентів, а також у період педагогічної практики.

У контексті підготовки майбутніх учителів математики *GeoGebra* виконує не лише ілюстративну, а й методичну функцію. Студенти набувають досвіду створення власних динамічних моделей, що формує їхню готовність до впровадження цифрових засобів візуалізації у шкільному курсі математики. Зокрема, інструменти анімації дозволяють демонструвати процеси граничного переходу, дослідження екстремумів, зміну поведінки функції при варіюванні параметрів, що значно підсилює наочність навчання (Лещенко, 2025).

Серед обмежень можна відзначити менші можливості символічних перетворень порівняно із системами комп'ютерної алгебри, однак це компенсується високим рівнем інтерактивності та наочності.

Таким чином, *GeoGebra* є універсальним дидактичним інструментом реалізації принципу наочності, що забезпечує інтеграцію аналітичного та графічного компонентів навчання, активізує пізнавальну діяльність і сприяє формуванню професійної компетентності майбутніх учителів математики в умовах цифрового освітнього середовища.

**Desmos** – це веборієнтована система динамічної математики, призначена передусім для побудови та дослідження графіків функцій, параметричних залежностей і статистичних моделей у режимі реального часу. У контексті реалізації дидактичного принципу наочності *Desmos* виступає ефективним інструментом швидкої інтерактивної візуалізації математичних об'єктів у підготовці майбутніх учителів математики.

До основних можливостей *Desmos* належать: побудова графіків функцій однієї та кількох змінних; створення параметричних і полярних графіків; використання повзунків для дослідження впливу параметрів; візуалізація систем рівнянь та нерівностей; дослідження перетинів графіків, точок екстремуму, нулів функції; побудова таблиць значень і діаграм розсіювання; виконання базових

статистичних розрахунків та побудова регресійних моделей; створення інтерактивних навчальних активностей (Шевчук, 2020).

Середовище характеризується мінімалістичним інтерфейсом і високою швидкістю графічної обробки, що дозволяє миттєво відображати зміни графіка при варіюванні параметрів. Введення формули автоматично супроводжується її графічною інтерпретацією, що забезпечує безпосередній зв'язок між аналітичним записом і геометричним образом. Така функціональність сприяє розвитку інтуїтивного розуміння поведінки функцій і залежностей.

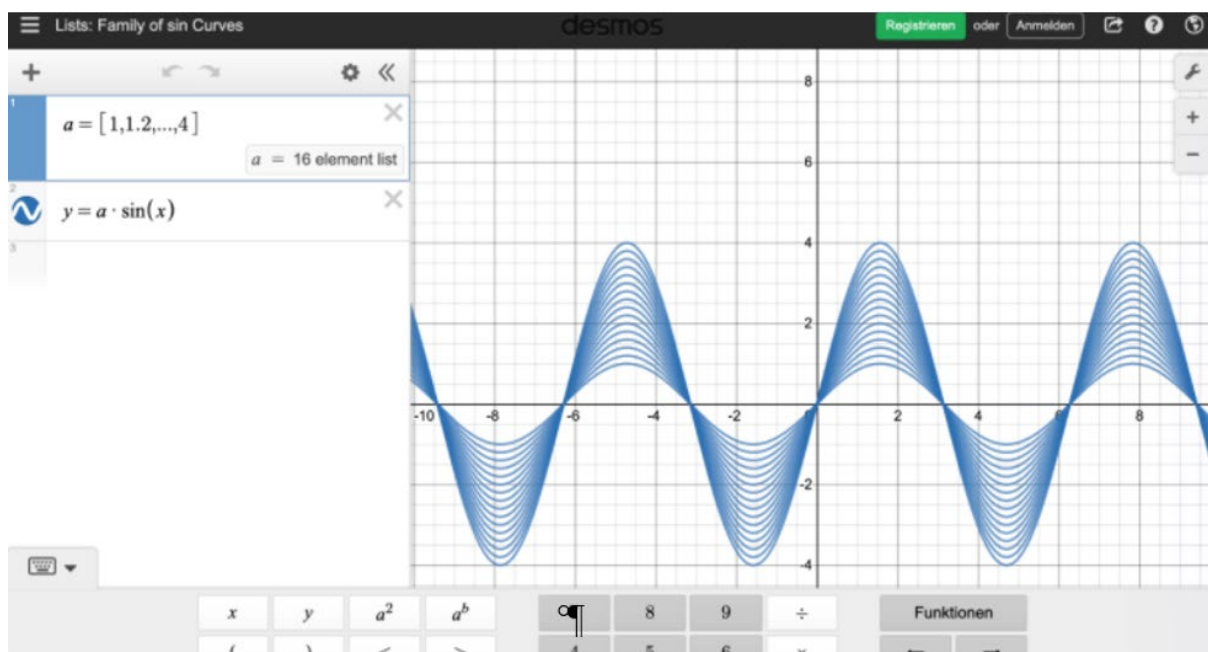


Рис. 7. Фрагмент роботи у системі Desmos

На рисунку 7 представлено приклад використання середовища *Desmos* для дослідження параметричної залежності функції у контексті реалізації дидактичного принципу наочності. Зображено сімейство синусоїд, заданих формулою:

$$y = a \cdot \sin(x),$$

де параметр  $a$  набуває різних значень (у лівій панелі подано список значень параметра). У результаті на координатній площині одночасно відображається кілька графіків, що утворюють так зване «сімейство кривих».

Даний приклад демонструє можливості *Desmos* щодо:

- варіювання параметра в режимі реального часу;
- одночасного відображення декількох графіків;
- візуального аналізу впливу коефіцієнта на амплітуду функції;
- встановлення функціональної залежності між аналітичним записом і графічним образом.

З дидактичної точки зору така візуалізація є особливо ефективною при формуванні у майбутніх учителів математики розуміння ролі параметрів у функціональних залежностях (Олексюк, Іванюк, 2021). Зміна коефіцієнта  $a$  наочно ілюструє зміну амплітуди коливань без впливу на період функції, що дозволяє студентам узагальнити властивості тригонометричних функцій на основі спостереження та аналізу.

Інтерактивність середовища сприяє переходу від статичного сприйняття графіка до дослідницької діяльності: студенти можуть самостійно змінювати параметри, формулювати гіпотези щодо поведінки функції та перевіряти їх експериментально. Таким чином, *Desmos* забезпечує поєднання аналітичного, графічного й експериментального компонентів навчання.

Системи динамічної математики дозволяють реалізувати принцип наочності не лише через демонстрацію готових графіків, а й через організацію параметричного моделювання, що формує методичну готовність майбутніх учителів математики до використання інтерактивних засобів у шкільному курсі математики.

На рисунку 8 представлено приклади використання середовища *Desmos* для створення складних графічних моделей на основі аналітичних виразів і систем рівнянь (Роботи глобального конкурсу математичного мистецтва, 2020). Зображення демонструє три різні типи візуалізацій, що ілюструють потенціал *Desmos* у реалізації дидактичного принципу наочності.

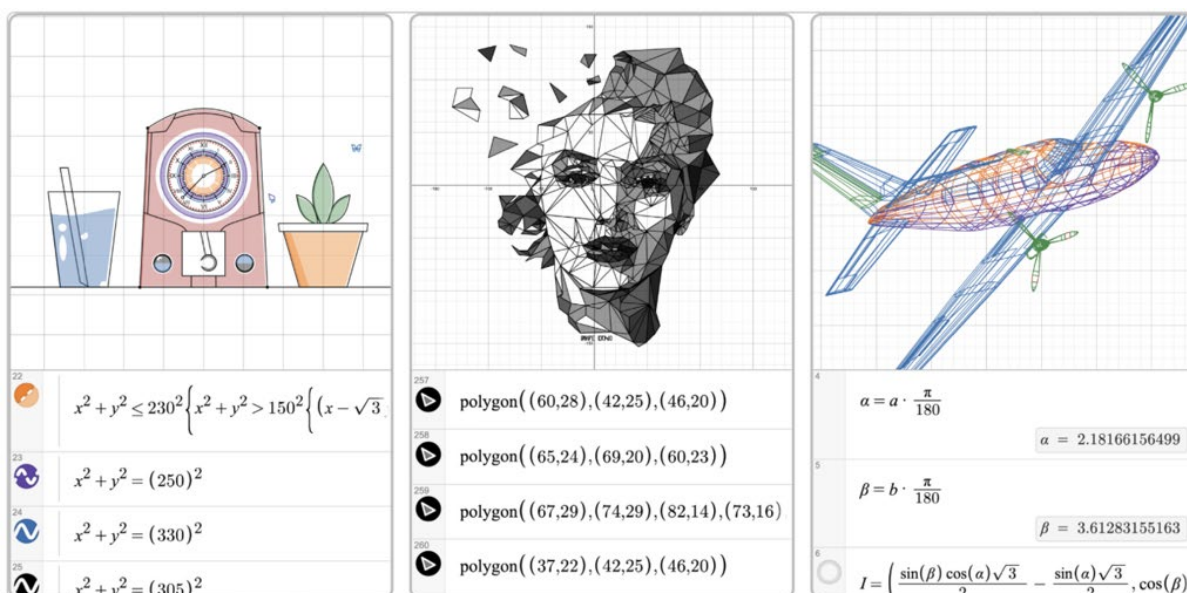


Рис. 8. Фрагмент роботи у системі Desmos

У лівій частині подано приклад побудови композиційного зображення (інтер'єрна сцена з годинником, склянкою та рослиною), сформованого за допомогою рівнянь кіл, нерівностей і систем умов. Аналітичні записи типу  $x^2 + y^2 = r^2$ , свідчить про використання рівнянь другого порядку для моделювання геометричних елементів. Такий підхід дозволяє майбутнім учителям математики усвідомити зв'язок між алгебраїчним описом і графічною інтерпретацією об'єкта.

У центральній частині зображено складну полігональну модель обличчя, створену через задання великої кількості координат вершин багатокутників. У списку ліворуч відображено команди типу `polygon((x1,y1), (x2,y2), ...)`, що демонструє можливість *Desmos* працювати з координатною геометрією та моделювати об'єкти засобами аналітичної побудови. Це сприяє розвитку просторового мислення, алгоритмічної культури та розуміння структури геометричних моделей.

У правій частині рисунка представлено тривимірну параметричну модель літака з використанням тригонометричних залежностей і параметрів (наприклад, формули перетворення градусної міри кута в радіани). Наявність повзунків для

параметрів  $\alpha$  та  $\beta$  свідчить про динамічний характер моделі — зміна значень автоматично змінює форму або орієнтацію об'єкта. Така інтерактивність є важливим інструментом у процесі дослідження функціональних залежностей і параметричних моделей.

У підготовці майбутніх учителів математики *Desmos* доцільно використовувати як засіб оперативної демонстрації властивостей функцій, дослідження поведінки графіків при зміні коефіцієнтів, пояснення геометричного змісту похідної та інтеграла (через наближення площ), а також для організації дослідницьких завдань і фронтальної роботи зі студентами.

Важливою перевагою *Desmos* є його доступність (робота через браузер без встановлення програмного забезпечення), що робить його зручним інструментом для аудиторного й дистанційного навчання. Система підтримує колективну взаємодію, що сприяє розвитку комунікативних компетентностей та організації активних форм навчання (Олексюк, Іванюк, 2021).

Разом з тим, можливості символічних перетворень у *Desmos* є обмеженими порівняно із системами комп'ютерної алгебри. Тому у фаховій підготовці майбутніх учителів доцільним є його поєднання з СКМ (*Maple*, *Mathematica*, *MatLab* тощо), що забезпечує інтеграцію чисельних і символічних методів із динамічною графічною інтерпретацією.

Таким чином, *Desmos* виступає сучасним інструментом реалізації принципу наочності, який дозволяє оперативно поєднувати аналітичний і графічний компоненти навчання, активізувати пізнавальну діяльність студентів та формувати їхню методичну готовність до використання цифрових засобів візуалізації у шкільному курсі математики.

Застосування СДМ сприяє переходу від статичного ілюстрування навчального матеріалу до динамічного моделювання, що особливо важливо під час вивчення функціональних залежностей, похідної та її геометричного змісту, інтеграла як границі інтегральної суми, поведінки функцій багатьох змінних, елементів лінійної алгебри та теорії ймовірностей. Інтерактивність таких

середовищ дозволяє варіювати параметри моделей у реальному часі, спостерігати зміну графіків і формувати причинно-наслідкові зв'язки між формульним записом і його геометричною інтерпретацією (Ніколаєнко, Синько, 2016).

Використання СДМ у підготовці майбутніх учителів математики має не лише ілюстративне, а й методичне значення. Студенти набувають досвіду створення власних динамічних моделей, що формує їхню готовність до впровадження цифрових засобів у шкільній практиці. Така діяльність сприяє розвитку алгоритмічного та просторового мислення, дослідницьких умінь, а також уміння організовувати навчальний процес із застосуванням інтерактивних технологій.

Доцільність інтеграції систем динамічної математики у зміст фахових дисциплін обумовлюється також необхідністю індивідуалізації навчання, підвищення мотивації студентів і створення умов для активного залучення їх до пізнавальної діяльності. Використання анімацій, параметричних моделей, візуалізації багатовимірних об'єктів і статистичних даних забезпечує глибше розуміння складних абстрактних понять та сприяє формуванню професійної математичної компетентності (Шевчук, 2021).

Подальший розвиток методики застосування СДМ у підготовці майбутніх учителів математики доцільно спрямувати на розроблення навчально-методичних комплексів, що поєднують інтерактивні моделі, методичні рекомендації та систему завдань дослідницького характеру. Це дозволить забезпечити системність використання цифрових інструментів, підвищити якість фахової підготовки та сформувати стійку готовність майбутнього педагога до реалізації принципу наочності в умовах сучасного цифрового освітнього середовища.

У межах дослідження, присвяченого реалізації дидактичного принципу наочності засобами систем динамічної математики, впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у процес підготовки майбутніх

учителів математики розглядається не як допоміжний, а як системоутворювальний чинник модернізації фахової освіти. Використання сучасних цифрових інструментів у навчанні вищої математики створює умови для переходу від переважно репродуктивного засвоєння матеріалу до дослідницько-орієнтованої моделі навчання, у якій поєднуються аналітичні розрахунки, моделювання та візуалізація математичних об'єктів.

Основним завданням застосування ІКТ, зокрема систем комп'ютерної алгебри та динамічної математики, є підвищення рівня наочності навчального матеріалу та оптимізація його сприйняття через структуроване, компактне й інтерактивне подання змісту (Клочко, 2004). Динамічна візуалізація функціональних залежностей, геометричних перетворень і параметричних моделей сприяє глибшому розумінню математичних закономірностей та встановленню міжпредметних зв'язків.

Використання цифрових середовищ також забезпечує: розвиток творчого потенціалу здобувачів освіти та їхніх комунікативних компетентностей; формування умінь експериментально-дослідницької діяльності через моделювання й аналіз результатів; підвищення культури навчальної праці та навчальної мотивації; інтенсифікацію освітнього процесу за рахунок автоматизації рутинних обчислень; розширення і поглиблення змісту курсу вищої математики через включення прикладних задач і чисельних методів; формування здатності вільно оперувати математичними поняттями, операціями та функціями у цифровому середовищі; реалізацію суспільного запиту на підготовку фахівця, здатного ефективно працювати в умовах інформатизованого освітнього простору (Шевчук, Шевчук, 2021).

Аналіз педагогічної практики дозволяє виокремити чинники активізації навчальної діяльності студентів, ефективність яких суттєво підсилюється за умови системного використання програмно-педагогічних засобів. До таких чинників належать: зростання пізнавальної мотивації та інтересу до способів здобуття знань; розвиток логічного й алгоритмічного мислення; індивідуалізація

та диференціація навчання; формування самостійності; переорієнтація на активні методи навчання; розширення інструментарію пізнавальної діяльності; залучення студентів до виконання лабораторних і дослідницьких робіт з використанням цифрового моделювання.

Як підкреслює В. Ключко, застосування систем комп'ютерної математики не лише демонструє можливості сучасних обчислювальних технологій, а й акцентує увагу на прикладних аспектах математичних методів, особливостях чисельних розв'язків, межах використання комп'ютерних інструментів (Ключко, 2004). Це сприяє усвідомленню структурних зв'язків між розділами курсу та підвищує зацікавленість студентів у глибокому опануванні математичного знання.

У структурі підготовки майбутніх учителів математики доцільно використовувати різні типи цифрових засобів: лекційні демонстрації, інтерактивні динамічні моделі, тренажери для відпрацювання алгоритмів, навчальні експертні системи. Особливої ваги комп'ютерна підтримка набуває в умовах модульної організації навчання, що передбачає систематичну самостійну роботу студентів, поетапний контроль та рефлексію результатів.

Модульний підхід, заснований на принципах самостійності, систематичності й свідомості навчання, органічно поєднується з використанням систем динамічної математики. Цифрові середовища дозволяють забезпечити оперативний зворотний зв'язок, автоматизований контроль, варіативність завдань та адаптацію складності матеріалу. За таких умов особливого значення набувають технології активного навчання, що спираються не лише на процеси сприйняття та запам'ятовування, а передусім на розвиток творчого, продуктивного мислення.

У контексті дослідження реалізації дидактичного принципу наочності засобами систем динамічної математики у підготовці майбутніх учителів математики виникає потреба у структурованому визначенні місця та функціонального призначення цифрових інструментів у межах курсу вищої

математики. Систематизація напрямів їх використання дозволяє перейти від епізодичного застосування програмних засобів до науково обґрунтованої моделі інтеграції цифрових технологій у зміст фахової підготовки.

Аналіз можливостей систем динамічної математики (*GeoGebra, Desmos*) та систем комп'ютерної алгебри (*Maple, Mathematica, MATLAB, Mathcad, Maxima*) засвідчує їхню взаємодоповнювальність. Якщо перші забезпечують інтерактивну візуалізацію та динамічне моделювання математичних об'єктів, то другі орієнтовані на виконання складних символічних і чисельних обчислень, алгоритмізацію та проведення комп'ютерного експерименту. Саме поєднання цих інструментів створює умови для повноцінної реалізації принципу наочності, що передбачає інтеграцію образного та логіко-аналітичного компонентів пізнавальної діяльності.

З метою конкретизації змісту використання зазначених систем у структурі курсу вищої математики розроблено узагальнену модель їх застосування відповідно до основних модулів навчальної дисципліни. У таблиці подано співвідношення змістових компонентів курсу, рекомендованих цифрових інструментів та очікуваних дидактичних результатів, що дозволяє обґрунтувати доцільність їх інтеграції у професійну підготовку майбутніх учителів математики.

Таблиця 1

**Інтеграція систем динамічної математики та систем комп'ютерної алгебри у структурі курсу вищої математики (у контексті реалізації принципу наочності)**

Модуль курсу	Змістові компоненти	Системи динамічної математики (СДМ)	Системи комп'ютерної алгебри (СКМ)	Очікуваний дидактичний результат
Лінійна алгебра та аналітична геометрія	Вектори, матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, лінійний простір	GeoGebra 3D, Desmos	Maple, MATLAB, Mathcad, Maxima	Формування просторового мислення; візуалізація базисів і перетворень;

				поєднання аналітичного та графічного подання
Границі та неперервність	Границі послідовностей і функцій, точки розриву	GeoGebra, Desmos	Maple, Mathematica, Maxima	Динамічне моделювання процесу граничного переходу; усвідомлення поведінки функції
Диференціальне числення	Похідна, дослідження функцій, екстремуми	GeoGebra (анімована дотична)	Maple, Mathematica, MATLAB	Геометрична інтерпретація похідної; автоматизація обчислень
Інтегральне числення	Невизначений і визначений інтеграли, невластні інтеграли	GeoGebra (площа під кривою)	Maple, Mathematica, Mathcad	Візуалізація інтегральної суми; формування зв'язку між площею та аналітичним записом
Функції багатьох змінних	Поверхні, лінії рівня, градієнт	GeoGebra 3D	MATLAB, Maple, Mathematica	Просторове моделювання; розвиток образного мислення
Числові ряди	Ряди Тейлора і Фур'є, збіжність	GeoGebra (часткові суми)	Mathematica, Maple, MATLAB	Демонстрація збіжності; дослідження похибки наближення
Диференціальні рівняння	Рівняння 1-го та вищих порядків, системи	GeoGebra	MATLAB, Maple, Mathematica	Побудова інтегральних кривих; фазові портрети; чисельне моделювання
Теорія ймовірностей та статистика	Закони розподілу, регресія, МНК	Desmos, GeoGebra	MATLAB, Maple, Mathcad	Моделювання випадкових процесів; інтерпретація статистичних результатів

Джерело: авторська розробка

Представлена модель інтеграції систем динамічної математики (СДМ) та систем комп'ютерної алгебри (СКМ) у структуру курсу вищої математики демонструє їхню взаємодоповнювальність у реалізації дидактичного принципу наочності.

По-перше, СДМ (*GeoGebra, Desmos*) забезпечують інтерактивну візуалізацію математичних об'єктів, що дозволяє формувати образне сприйняття абстрактних понять. Їх використання є особливо ефективним при поясненні геометричного змісту похідної, інтеграла, поведінки функцій багатьох змінних, побудові статистичних моделей.

По-друге, СКМ (*Maple, Mathematica, MATLAB, Mathcad, Maxima*) орієнтовані на виконання складних символічних і чисельних обчислень, що забезпечує глибоке аналітичне опрацювання матеріалу. Вони дозволяють автоматизувати громіздкі обчислення, зосереджуючи увагу студентів на змістовому аналізі результатів.

Таким чином, поєднання СДМ і СКМ створює цілісне цифрове освітнє середовище, у якому:

- забезпечується інтеграція аналітичного та графічного компонентів навчання;
- активізується дослідницька діяльність студентів;
- підвищується рівень професійної математичної компетентності;
- формується методична готовність майбутніх учителів до використання цифрових засобів у шкільному курсі математики.

Результати аналізу дозволяють стверджувати, що системне впровадження зазначених цифрових інструментів у підготовку майбутніх учителів математики сприяє переходу від інформаційно-репродуктивної моделі навчання до компетентнісно-дослідницької, що відповідає сучасним вимогам цифрової трансформації освіти.

Вдосконалення процесу вивчення вищої математики в ЗВО може бути деталізовано і зведено до наступного :

- скорочення числа навчальних дисциплін за рахунок об'єднання і введення нових, більш актуальних;
- коригування змісту навчальних дисциплін з метою забезпечення необхідного рівня і якості професійної підготовки спеціалістів;
- науково-обґрунтована регламентація змісту і об'єму навчального матеріалу, який виноситься на аудиторні заняття і на самостійну роботу;
- посилення індивідуального підходу до навчання студентів;
- підвищення об'єктивності оцінки рівня знань, вмінь і навичок студентів з даної дисципліни;
- подальше впровадження активних методів навчання, перш за все комп'ютерно-орієнтованих систем навчання.

Необхідно констатувати, що останнім часом процес використання комп'ютерної техніки та інформаційних технологій у вищій школі, зокрема, при вивченні математичних дисциплін, дещо активізувався. Це, на нашу думку, сталося завдяки покращенню комп'ютерної бази ЗВО і наявності на ринку програмного забезпечення таких універсальних математичних пакетів як *Derive*, *Mathcad*, *Matlab*, *Maple V*, *Mathematica*, *MuPad* та ін.

Таким чином, використання комп'ютера та інформаційних технологій дають змогу збагатити математичну науку, розширити її застосування, суттєво вплинути на математичну діяльність майбутнього учителя математики. Головним змістом математичної освіти стане не опанування певними алгоритмами розв'язування математичних задач (вони, до речі, досить ефективно розв'язуються за допомогою комп'ютера), а математична компетентність, розуміння і застосування математичних методів дослідження

При використанні комп'ютерних технологій зміст і структура навчання можуть змінюватись у досить широкому діапазоні, причому в силу наочності та оперативності одержуваних результатів можна очікувати досягнення значного підвищення ефективності та якості навчання студентів незалежно від рівня їх математичної підготовки.

Комп'ютерна підтримка вивчення математики є одним з важливих факторів стимулювання учнів, студентів до активної навчально-пізнавальної діяльності. Комп'ютерний супровід робить математику більш доступною та цікавою, що зумовлює добрий педагогічний ефект при викладанні математики. Тому безперечно, що комп'ютерні технології навчання слід широко впроваджувати при викладанні математики у всіх закладах освіти.

У жовтні 2009 р. було випущено програмний продукт для iPhone (пізніше – для iPad), а у жовтні 2010 р. – для Android, що являє собою браузер, здатний показувати лише одну сторінку – [m.wolframalpha.com](http://m.wolframalpha.com) з розширеною клавіатурою для введення математичних формул. Це дає можливість використовувати *WolframAlpha* як програмний засіб мобільного навчання математики (Рашевська, Ліннік, Горшкова, 2010).

Мобільне математичне середовище – це програмне забезпечення, що надає можливість мобільного доступу до математичних об'єктів, інтеграції аудиторної роботи у безперервний навчальний процес, організації в межах одного середовища повного циклу навчання:

- зберігання та подання навчальних матеріалів;
- проведення навчальних математичних досліджень;
- підтримка індивідуальної та колективної роботи;
- оцінювання навчальних досягнень

Як мобільний програмний засіб навчання математики можна використовувати нову систему *MathPiper*, що інтегрує в собі систему комп'ютерної алгебри *Yacas* та систему динамічної геометрії *GeoGebra* (рис. 9).

*MathPiper* ([www.mathpiper.org/](http://www.mathpiper.org/)) – це математико-орієнтоване середовище, що складається з набору програм, використання яких надає можливість:

- автоматично виконувати широкий діапазон числового та символічного обчислень математичних об'єктів;
- забезпечують інтерфейс користувача, що надає можливість використовувати алгоритми обчислення, створювати та керувати

математичними об'єктами за допомогою маніпуляторів;

– створювати алгоритми покрокових команд для вирішення математичних задач.

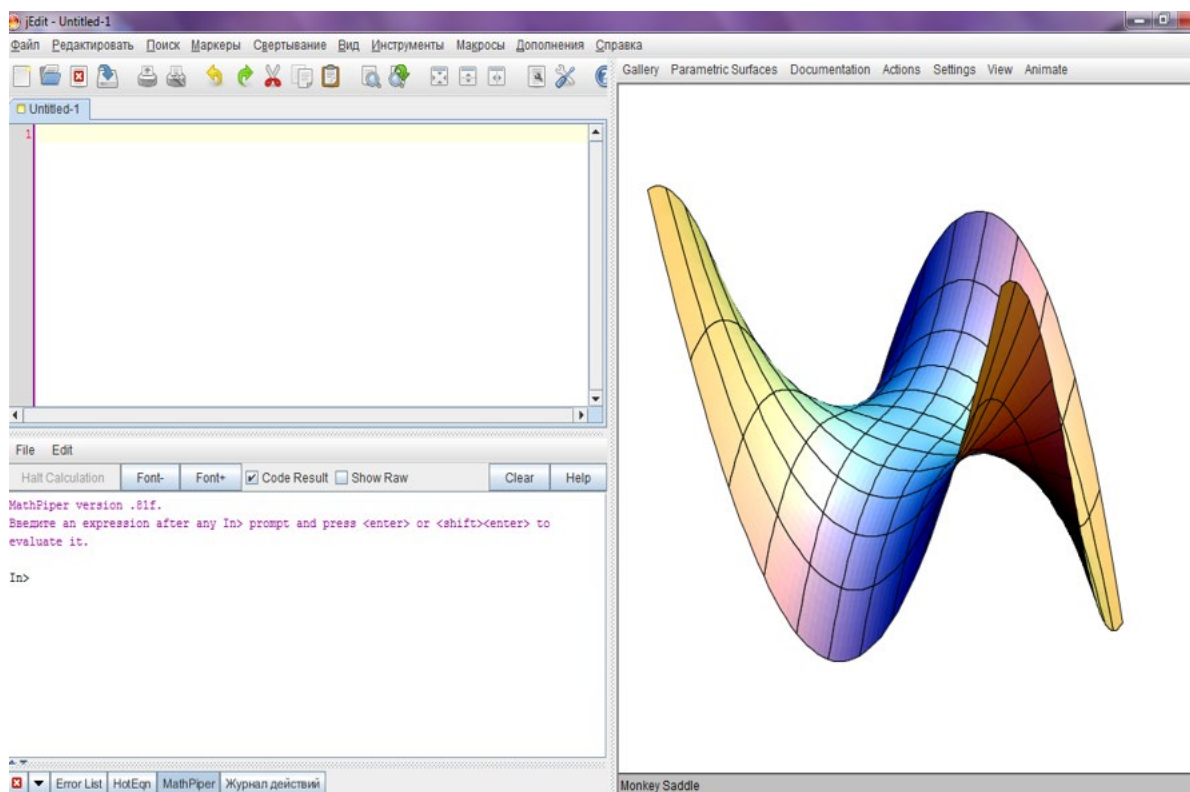


Рис.9. Вікно web-орієнтованої СКМ MathPiper

Мобільне математичне середовище (ММС) можна визначити як відкрите модульне мережне мобільне інформаційно-обчислювальне програмне забезпечення, що надає користувачу (викладачу, учню, студенту) можливість мобільного доступу до інформаційних ресурсів математичного і навчального призначення, створюючи умови для ефективної організації навчального процесу та інтеграції аудиторної і поза аудиторної роботи

Приєднуємось до думки З. Слєпкань, що сьогодні можливість навчання будь-де і будь-коли є загальною тенденцією інтенсифікації життя в інформаційному суспільстві. Така можливість забезпечується, зокрема, й за допомогою так званого мобільного навчання – нової технології навчання, що ґрунтується на інтенсивному застосуванні сучасних мобільних засобів та

технологій (Слепкань, 2006).

Мобільне навчання є новою освітньою парадигмою, на основі якої створюється нове навчальне середовище, де учні можуть отримати доступ до навчальних матеріалів у будь-який час та в будь-якому місці, що робить процес навчання привабливішим, демократичним і стимулює учня ще з школи до самоосвіти та навчання протягом усього життя.

Безумовно, мобільне навчання надає нову якість освітнього процесу, найбільш повно відображає тенденції в освіті сучасної людини, забезпечуючи постійний доступ до інформації; є новим інструментарієм у розвитку інформаційного суспільства, в якому формується нове середовище навчання. Технологія мобільного навчання передбачає наявність електронної середовища, що включає в себе комп'ютерні навчальні засоби і сервіси, а також наявність веб-доступу до них з різних мобільних пристроїв. Розвиток підходів мобільного навчання дозволяє використовувати бездротові мобільні додатки для доступу до ресурсів інформаційно-освітніх середовищ вузу, дає можливість організації для студентів і педагогів електронного освітнього офісу, що сприяє підвищенню академічної мобільності, індивідуалізації та диференціації процесу навчання майбутніх учителів математики.

Основними складовими ММС є обчислювальне ядро (web-СКМ), інформаційне і методичне забезпечення (лекційні демонстрації, презентації та інші навчальні матеріали в електронному вигляді, тренажери, динамічні математичні моделі, навчальні експертні системи), а також мережний сервер.

К. Словак, С. Семеріков та Ю. Триус вказують, що головними критеріями вибору СКМ для обчислювального ядра ММС є :

- розширюваність (система повинна надавати можливість користувачеві доповнювати її для розв'язання нових класів задач);
- наявність різних інтерфейсів та підтримка web-сервісів (для забезпечення мобільного доступу);
- кросплатформеність (мобільність програмного забезпечення);

– можливість створення програм із стандартними елементами управління (лекційних демонстрацій, динамічних моделей, тренажерів, навчальних експертних систем);

– можливість інтегрувати у себе різноманітне програмне забезпечення (на основі відкритих програмних інтерфейсів);

– підтримка технології Wiki;

– можливість локалізації та вільне поширення (Словак, Семеріков, Триус, 2012). Зокрема, як обчислювальне ядро ММС можна використовувати *web-CKM SAGE*, яка задовольняє практично всі зазначені вимоги.

За основними характеристиками ММС є:

– мобільність доступу: виконуватись на широкому спектрі комп'ютерних пристроїв, що надає можливість залучити як засоби навчання нетбуки, планшетні комп'ютери та смартфони;

– мобільність програмного забезпечення: можливість перенесення середовища на різні програмно-апаратні платформи без значної модифікації;

– мережевість: використання і зберігання математичних об'єктів на мережних серверах, що надає можливість уніфікувати доступ до них як в навчальній аудиторії, так і за її межами;

– відкритість: можливість зміни інформаційної та обчислювальної складових середовища;

– модульність: можливість додавання, вилучення та заміни компонентів середовища;

– об'єктна орієнтованість: можливість прототипування, створення, модифікації, наслідування, інкапсуляції математичних об'єктів;

– можливість застосування ефективних педагогічних технологій організації роботи студентів над навчальними і дослідницькими проектами у навчальних спільнотах (Шевчук, 2015).

Особливість ММС полягає в динамічній природі навчальних матеріалів,

тобто будь-який опублікований у мережі об'єкт може автоматично змінюватися відповідно до: зміни вмісту пов'язаного з ним робочого аркуша; зміни програмного забезпечення, що входить до складу ММС; зміни пристрою доступу до навчальних матеріалів; зміни початкових умов для моделей (Словак, Семіряков, 2011).

Web-орієнтовані засоби навчання, оглядово розглянуті, націлені на підвищення професіоналізму педагогів при викладанні математики. Сучасного педагога неможливо уявити без володіння структурними компонентами системи дидактичного забезпечення електронного навчання. Все більше шкіл України мають якісне технічне оснащення, отримують доступ до всесвітньої комп'ютерної мережі Інтернет. Разом із поглибленням знань і практичних навичок роботи з комп'ютерними засобами «щільність» застосування спеціалізованих математичних комп'ютерних інструментів буде зростати. Це змушує все більше наповнювати традиційну шкільну математику і предметну базу вчителя математики курсами і методами застосування СКМ через окремий курс обов'язкової підготовки

Отже, реалізація дидактичного принципу наочності у підготовці майбутніх учителів математики засобами систем динамічної математики є важливою складовою модернізації професійної освіти в умовах цифрової трансформації. Використання інтерактивних математичних середовищ забезпечує якісно новий рівень візуалізації абстрактних понять, сприяє усвідомленому засвоєнню теоретичного матеріалу та формуванню цілісного розуміння математичних об'єктів і процесів.

Доведено, що систематичне застосування систем динамічної математики активізує пізнавальну діяльність студентів, розвиває просторове й аналітичне мислення, дослідницькі вміння та здатність до математичного моделювання. Водночас інтеграція таких засобів у фахові дисципліни сприяє формуванню методичної компетентності майбутніх учителів, їхньої готовності до впровадження цифрових технологій у шкільну практику.

Таким чином, використання систем динамічної математики виступає ефективним інструментом реалізації принципу наочності, що забезпечує підвищення якості математичної підготовки та відповідає сучасним вимогам до професійної діяльності вчителя математики.

### Література

1. Андрощук М. В., Жук А. В. Використання середовища GeoGebra для вивчення шкільного курсу стереометрії (учнями 10–11 класів). *Universum*. 2024. № 13. С. 239–249. URL: <https://eprints.zu.edu.ua/41461/1/universum13.pdf>
2. Глобальний конкурс математичного мистецтва 2020 року. URL: <https://blog.desmos.com/articles/art-contest-launch-2021/>
3. Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання предметів природничо-математичного циклу з педагогічно виваженим використанням систем комп'ютерної математики. Київ, 2020. 30 с.
4. Грудкіна Н. С., Кайдан Н. В., Колесников С. О., Дмитришин І. С. Використання СКМ Maple при розв'язанні задач з обчислення геометричної ймовірності. *Педагогічна академія: наукові записки*. 2024. № 9. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13326522>
5. Дяченко О. Ф. Інтеграція математичних і спеціальних інформатичних дисциплін у професійній підготовці бакалаврів із системного аналізу : дис. ... канд. Пед. Наук. Бердянськ, 2020.
6. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання* : зб. Наук. Пр. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. Вип. 7. С. 3–16.
7. Клочко В. І. Проблема трансформації змісту курсу вищої математики в технічних університетах в умовах використання сучасних інформаційних технологій. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*. 2004. Вип. 22. С. 10–15.
8. Ковальов Л. Є., Лещенко С. В., Медведєва М. О., Ненька Р. В. З досвіду використання вільних комп'ютерних математичних систем при навчанні вищої

математики і фізики. *Фізико-математична освіта*. 2020. Вип. 1(23), ч. 2. С. 45–52.

9. Ковальчук М. Б. Моделювання задач математичної фізики в системі комп'ютерної математики Maple. *Фізико-математична освіта*. 2019. Вип. 2(20). С. 40–47.

10. Крамаренко Т. Г., Чернишова І. В. Система динамічної математики GeoGebra як engineering-інструмент STEM-орієнтованого підходу до навчання стереометрії. *Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодні і перспективи*. 2024. С. 97–98.

11. Лещенко Т. Т. Моделювання та розв'язування геометричних задач у старшій школі за допомогою GeoGebra. *Методичний пошук. Цифрові технології у роботі сучасного вчителя математики*. 2025. С. 81.

12. Мілюкова І. Р. Застосування математичного пакету MathCAD при розв'язанні задач з фізики. *Фізико-математична освіта*. 2019. Вип. 2(20). С. 99–106.

13. Мороз О. І., Кононець Н. В. Використання інформаційних технологій для побудови функціональної залежності в математиці. *Ресурсно-орієнтоване навчання в «3D»: доступність, діалог, динаміка : збірник тез доповідей I Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (22-23 лютого 2021 року, м. Полтава)*. Полтава : ПУЕТ, 2021. С. 80-84.

14. Ніколаєнко М. С., Синько Л. С. Використання програмного засобу GeoGebra на уроках математики. 2016.  
URL: <https://conference.vntu.edu.ua/eir/eir2015/pdf/000-291-302.pdf>

15. Олексюк О. Р., Іванюк Т. Г. Методика використання сервісу Desmos як засобу розвитку професійних компетентностей учителя математики. 2021.

16. Покришень Д. А. ІКТ для вчителів математики та фізики : посібник для вчителів. Чернігів : Видавець Лозовий В., 2013. 106 с.

17. Почтовюк С. І. Застосування електронного навчального посібника «Математика з MATLAB» в навчальному процесі. *Науковий часопис НПУ імені*

М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. 2011. № 10. С. 120–126.

18. Рашевська Н. В. Використання пакету динамічної геометрії GeoGebra в процесі вивчення вищої математики. *Проблеми сучасної педагогічної освіти*. 2010. Вип. 29, ч. 1. С. 172–178.

19. Рашевська Н. В., Ліннік О. П., Горшкова Г. А. Застосування Web-СКМ для генерації завдань з вищої математики. *Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2010)* : матеріали VII Всеукр. Наук.-практ. Конф. Черкаси, 2010. Т. 2. С. 27.

20. Рибак С. М., Сільвейстр А. М. Використання інформаційних технологій навчання у підготовці вчителя фізики. *Наукові записки. Серія: Педагогіка і психологія*. Вінниця : Діло, 2007. Вип. 20. С. 145–151.

21. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник. 2-ге вид., допов. І переробл. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.

22. Словак К. І., Семіряков С. О. Теорія та методика застосування мобільних математичних середовищ у процесі навчання вищої математики студентів економічних спеціальностей. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2011. № 1(21). URL: <http://journal.iitta.gov.ua>

23. Словак К. І., Семеріков С. О., Триус Ю. В. Мобільні математичні середовища: сучасний стан та перспективи розвитку. 2012. URL: <https://enpuirb.udu.edu.ua>

24. Співаковський О. В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей. Херсон : Айлант, 2003. 180 с.

25. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у ВНЗ: проблеми, стан і перспективи. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2*. 2010. № 9(16). С. 16–29.

26. Шаран О.В. Методика вивчення комплексних чисел у профільних класах загальноосвітніх шкіл : дис. ... канд. Пед. Наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика). Київ, 2009. 282 с.
27. Шевчук Б., Шевчук Л. Основні компоненти професійної діяльності вчителя математики з використанням ІКТ в умовах неперервної освіти. *Journal of Information Technologies in Education (ITE)*. 2021. Вип. 45. DOI: <https://doi.org/10.14308/ite000735>
28. Шевчук Л. Д. Неперервна професійна підготовка майбутніх учителів математики засобами ІКТ : монографія. Київ : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. 465 с.
29. Шевчук Л. Д. Особливості формування професійної компетентності майбутніх учителів математики засобами ІКТ. *Фізико-математична освіта*. 2020. Вип. 2(24), ч. 2. С. 7–15.
30. Шевчук Л. Д. Теоретичні та методичні засади неперервної професійної підготовки майбутніх учителів математики засобами ІКТ : дис. ... д-ра пед. Наук : 13.00.04. Київ, 2021. 578 с.
31. Шевчук Л. Д., Шевчук Б. В. Системи комп'ютерної алгебри : навч.-метод. Посібник. Переяслав-Хмельницький, 2020. 224 с.
32. Шевчук Л. Д. Освітній потенціал web-орієнтованих систем комп'ютерної математики. *Комп'ютер в школі і сім'ї*. 2015. № 1(121). С. 33–38.
33. Шевчук Л. Д., Солопко І. О., Лоха А. А. Професійна підготовка сучасного учителя математики за кордоном: проблеми та реалії. *Наукові інновації та передові технології*. 2022. № 5(7). С. 156–169. DOI: [https://doi.org/10.52058/2786-5274-2022-5\(7\)-156-169](https://doi.org/10.52058/2786-5274-2022-5(7)-156-169)
34. Abell M. L., Braselton J. P. *Mathematica by Example*. Academic Press, 2017. 559 p.
35. Desmos [Електронний ресурс] // Desmos, Inc. 2020. URL: <https://www.desmos.com>

**Abstract.** *The article explores the possibilities of implementing the didactic principle of visualization in the process of training future mathematics teachers using dynamic mathematics systems. The feasibility of using digital tools for visualization of mathematical objects, processes and dependencies in the professional training of education seekers is substantiated. The didactic potential of interactive environments in the formation of mathematical concepts, the development of spatial thinking and research skills is analyzed. The pedagogical conditions for the effective integration of dynamic mathematics systems into the educational process of a higher education institution are determined. The role of digital visualization in increasing motivation for learning and forming methodological competence of future teachers is emphasized. It is proven that the systematic use of such tools contributes to the activation of cognitive activity and the preparation of students for the use of innovative technologies in professional activities.*

**Key words:** *principle of visualization, dynamic mathematics systems, professional training, future mathematics teachers, digital technologies, visualization, mathematical education.*